

強者の戦略

数学科の西村です。夏ももう終わりに差し掛かりましたが、勉強は順調に進んでいますでしょうか。体調を崩さないように気をつけて、これからも頑張ってくださいね。

さて、今年度二発目の問題です。今回は複素数平面の分野からの出題です。新課程2年目となった昨年度の入試ではこの分野から本格的に出題されました。今後の入試でも頻出分野の1つとなるでしょうから、しっかり対策をしておかなくてはなりません。是非この場で経験を積んでいってください。では今回の問題です。

問

複素数平面上を、点 P が次のように移動する。

- 時刻 0 では P は原点にいる。時刻 1 まで、 P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とする。
- 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 2 までその方向に速さ $\frac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とする。
- 以下同様に、時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において、進行方向を $\frac{\pi}{4}$ 回転し、時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし、 n は自然数である。

$\alpha = \frac{1+i}{2}$ として、次の問いに答えよ。

- z_n を α , n を用いて表せ。
- P が $Q_1(z_1)$, $Q_2(z_2)$, \dots と移動するとき、 P はある点 $Q(w)$ に近づく。 w を求めよ。
- z_n の実部が (2) で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。