# 強者の戦略

> 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ．また，その条件をみたす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ．

《考え方》

鋭角三角形となるための条件について，一般的に確認しておきましょう．

【辺の長さに注目】

3 辺 $a$，$b$，$c$ に対し

$$a^2+b^2>c^2$$
$$b^2+c^2>a^2$$
$$c^2+a^2>b^2$$

の<u>全てが</u>成り立つことが条件です．$a\leqq b\leqq c$ と条件をつけておけば，$c$ が最大なので，下 2 つの不等式の成立は明らかのため

$$a^2+b^2>c^2$$

のみで足ります．「最大辺」と「残る 2 辺」の話です．直角三角形でいう

$$a^2+b^2=c^2$$

を経由すれば分かりやすいはずです．

なお，例えば $c$ を最大辺として

$$a^2+b^2>c^2$$

が成り立てば，$a$，$b$，$c$ が全て正であることから

$$a^2+2ab+b^2>a^2+b^2>c^2$$
$$\therefore\ \ (a+b)^2>c^2$$
$$\therefore\ \ a+b>c$$

が成り立つため，「三角形の成立条件」も成り立ってくれます．

さらに，ここでは「長さ」に注目としておりますが，余弦定理より，例えば，長さが $a$ と $b$ である 2 辺の間の角を $\theta\,(0<\theta<\pi)$ とするとき

$$\cos\theta=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

のように表せるので

$$a^2+b^2>c^2$$

の条件から

$$\cos\theta>0$$

が導け，$0<\theta<\pi$ に注意すると

$$0<\theta<\frac{\pi}{2}$$

であることが，つまり，$\theta$ が鋭角であることが確認できます．

余弦定理を踏まえれば，直接的に「角度」に注目しているとも言うことができます．

【内積の利用】

三角形 ABC に対して

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}>0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}>0$$
$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}>0$$

の全てが成り立つことが条件です．これも

$$\cos\angle\mathrm{BAC}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|^2}$$

であることから

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}>0\ \ \Longleftrightarrow\ \ \cos\angle\mathrm{BAC}>0$$

と捉えていることに他なりません．なお，三角形の成立条件についても，辺の長さに注目したときと同様に保たれます（詳細は解答にて）．

---

長さにせよ内積にせよ，最終的には内角の『余弦』(コサイン)を利用しています．なお,『正弦』(サイン)の場合，鋭角と鈍角とで区別がつかない（ともに正の値をとる)ので不向きです．『正接』(タンジェント)は鋭角・鈍角の区別がつきますが，公式の道具が少ないため，あまり使われません．三角比ではなく，文字通り「角度そのもの」を考えていくのは，幾何などのように，具体的に辺の長さや角度が与えられていないと厳しいです．

では，以下，模範解答です．

《解 1》　辺の長さに注目

　まず

$$\mathrm{PQ}^2=(-x-x)^2+(-y-y)^2$$
$$=4x^2+4y^2$$
$$\mathrm{QR}^2=\{1-(-x)\}^2+\{0-(-y)\}^2$$
$$=x^2+2x+y^2+1$$
$$\mathrm{RP}^2=(x-1)^2+(y-0)^2$$
$$=x^2-2x+y^2+1$$

であり，題意を満たす条件は

$$\mathrm{PQ}^2<\mathrm{QR}^2+\mathrm{RP}^2 \ \cdots\cdots \text{①}$$
$$\mathrm{QR}^2<\mathrm{RP}^2+\mathrm{PQ}^2 \ \cdots\cdots \text{②}$$
$$\mathrm{RP}^2<\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2 \ \cdots\cdots \text{③}$$

の全てが成り立つことである．

　なお，三角形 PQR が存在するための条件は

$$\mathrm{PQ}<\mathrm{QR}+\mathrm{RP} \ \cdots\cdots \text{④}$$
$$\mathrm{QR}<\mathrm{RP}+\mathrm{PQ} \ \cdots\cdots \text{⑤}$$
$$\mathrm{RP}<\mathrm{PQ}+\mathrm{QR} \ \cdots\cdots \text{⑥}$$

の全てが成り立つことであるが，例えば ① が成り立てば

$$(\mathrm{QR}+\mathrm{RP})^2-\mathrm{PQ}^2$$
$$=(\mathrm{QR}^2+\mathrm{RP}^2-\mathrm{PQ}^2)+2\mathrm{QR}\cdot\mathrm{RP}$$
$$>0$$

より，④ は成り立つ．同様に ② から ⑤ が，③ から ⑥ が成り立つ．よって，①，②，③ の全てが成り立つとき，確かに三角形 PQR は存在する．

　したがって，求める $(x,\ y)$ の条件は

$$\text{①} \iff 4x^2+4y^2<2x^2+2y^2+2$$
$$\iff x^2+y^2<1$$

かつ

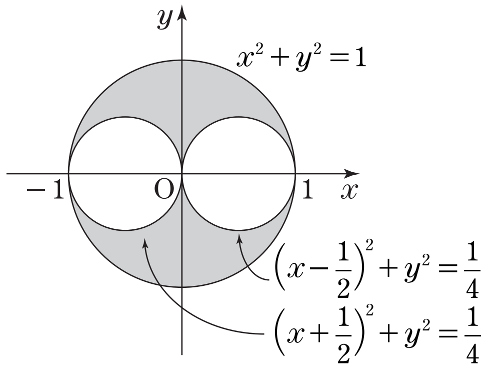
$$\text{②} \iff x^2+2x+y^2+1$$
$$<5x^2-2x+5y^2+1$$
$$\iff x^2-x+y^2>0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$$

かつ

$$\text{③} \iff x^2-2x+y^2+1$$
$$<5x^2+2x+5y^2+1$$
$$\iff x^2+x+y^2>0$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$$

である．

　また，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在範囲は，上記の不等式が表す領域を図示することにより，下図の色付き部分である（境界除く）．




《解 2》　内積の利用

　まず

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(-2x,\ -2y),\quad \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(1-x,\ -y)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(2x,\ 2y),\quad \overrightarrow{\mathrm{QR}}=(x+1,\ y)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(x-1,\ y),\quad \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=(-x-1,\ -y)$$

であり，題意を満たす条件は

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0 \ \cdots\cdots \text{①}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0 \ \cdots\cdots \text{②}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}>0 \ \cdots\cdots \text{③}$$

の全てが成り立つことである．

　なお，三角形 PQR が存在するための条件は

　　3 点 P，Q，R が全て異なり，かつ，

　　3 点が同一直線上に並ばない

ことであるが，いずれか 2 点が一致するときは，上で用いている 6 つのベクトルの中に $\vec{0}$ が含まれることになるので，①，②，③ の全てが成立することはない．また，3 点 P，Q，R が同一直線上に並ぶとき，例えば P，Q，R の順に並ぶとすると，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ のなす角は $\pi$ となるので，このとき ② は不成立．同様に，いずれの順で並ぶ場合も，①，②，③ の全てが成立することはない．よって，①，②，③ の全てが成り立つとき，確かに三角形 PQR は存在する．

したがって，求める $(x,\ y)$ の条件は

$$\text{①} \iff -2x(1-x)+(-2y)\cdot(-y)>0$$
$$\iff x^2-x+y^2>0$$
$$\iff \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$$

かつ

$$\text{②} \iff 2x(x+1)+2y\cdot y>0$$
$$\iff x^2+x+y^2>0$$
$$\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}$$

かつ

$$\text{③} \iff (x-1)(-x-1)+y\cdot(-y)>0$$
$$\iff -(x^2-1)-y^2>0$$
$$\iff x^2+y^2<1$$

である（以下略）．

《コメント》

いかがだったでしょうか．「内積が全て正」であることから，自動的に，三角形の成立条件も満たしてくれていること，およびその証明については，是非確認しておいてください．

なお，本問については，点 P と点 Q が原点対称であることなど特殊性があるので，実際はここまで難しく考える必要はなく，三角形の成立条件としては

$$y \fallingdotseq\!\!\!\!\!/\ 0$$

で済みます．

また，今回の利用は難しいですが，「鋭角」，「直角」，「鈍角」の分類として，『円』を利用する考え方も知っておいてください．

例えば，本問において

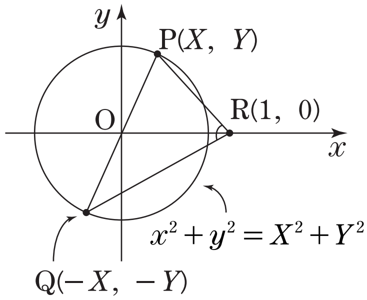
鋭角三角形となる条件

ではなく

$\angle$PRQ が鋭角となる条件

だったらどうでしょうか？

この場合は，下のような PQ を直径とする円を考えます（2 点 P，Q が異なるという前提のもとで）．




なお，混同を避けるため，P$(X,\ Y)$，Q$(-X,\ -Y)$ と，大文字にしています．その上で，件の円は

PQ の中点である O 中心，

半径 $\sqrt{X^2+Y^2}$ の円

であり，点 R がこの円の外側にあるとき，$\angle$PRQ は鋭角となります．

よって，R$(1,\ 0)$ が

$$x^2+y^2>X^2+Y^2$$

で表される領域に存在することが条件より

$$1^2+0^2>X^2+Y^2$$
$$\iff X^2+Y^2<1$$

となります（実際は，三角形の成立条件より，ここに $Y \neq 0$ が追加されます）．

なお

点 R がこの円の内側 $\iff$ $\angle$PRQ は鈍角

点 R がこの円周上 $\iff$ $\angle$PRQ は直角

と対応します．

特定の角のみに注目する場合は，このように

その角の対辺を直径とする円を考え，

その円の外側か内側か円周上か

で判断することができます．ただ，$\angle$PQR，$\angle$RPQ についてもあとは同様に考えるだけであるとは言え，本問ではやや面倒な印象を受けますね．

では，今回はここまでです．お疲れ様でした．

（研伸館数学科　野口）