

# 強者の戦略

それでは、前回の解答です。

## 第1問 (数III)

$a, b, c$  を実数とし、3つの2次方程式

$$x^2 + ax + 1 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$x^2 + bx + 2 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$x^2 + cx + 3 = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

の解を複素数平面上で考察する。

- (1) 2つの方程式①, ②がいずれも実数解を持たないとき、それらの解はすべて同一円周上にあるか、またはすべて同一直線上にあることを示せ。また、それらの解がすべて同一円周上にあるとき、その円の中心と半径を  $a, b$  を用いて表せ。
- (2) 3つの方程式①, ②, ③がいずれも実数解を持たず、かつそれらの解がすべて同一円周上にあるための必要十分条件を  $a, b, c$  を用いて表せ。

<解答>

①の判別式を  $D_1$  とし、2解を  $\alpha_1, \alpha_2$  とする。  
同様に

②の判別式を  $D_2$ , 2解を  $\beta_1, \beta_2$

③の判別式を  $D_3$ , 2解を  $\gamma_1, \gamma_2$

とおく。

- (1) ①, ②がいずれも実数解をもたないことから

$$D_1 = a^2 - 4 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$D_2 = b^2 - 8 < 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{5}$$

である。このとき

$$\textcircled{1} \iff x = \frac{-a \pm \sqrt{4 - a^2}i}{2} \quad (\because \textcircled{4})$$

$$\textcircled{2} \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{8 - b^2}i}{2} \quad (\because \textcircled{5})$$

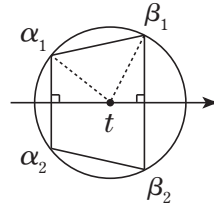
である。 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  と  $\beta_2$  はそれぞれ互いに共役な複素数であり、複素数平面上で実軸に関して対称に位置する。

$$\cdot -\frac{a}{2} = -\frac{b}{2} \iff a = b \text{ のとき}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  の実部がすべて等しいので、これらはすべて虚軸に平行な直線上にある。

・  $a \neq b$  のとき

実軸に関しての対称性より、4点  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  は等脚台形(長方形も含む)の4頂点をなす。等脚台形は円に内接するので、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  はすべて同一円周上にある。以上で前半部分は示せた。



以下、 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  が同一円周上にあるとき、その円の中心と半径を求める。このとき  $a \neq b$  であり、上図のように  $\alpha_1, \beta_1$  の虚部が正であるとして一般性を失わない。

実軸に関しての対称性より、円の中心は実軸上にあるので、中心を表す実数を  $t$  とおく。

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - t| &= |\beta_1 - t| \\ \iff \left| -\frac{a}{2} - t + \frac{\sqrt{4 - a^2}i}{2} \right| &= \left| -\frac{b}{2} - t + \frac{\sqrt{8 - b^2}i}{2} \right| \\ \iff \left( -\frac{a}{2} - t \right)^2 + \frac{4 - a^2}{4} &= \left( -\frac{b}{2} - t \right)^2 + \frac{8 - b^2}{4} \\ \iff at + t^2 + 1 &= bt + t^2 + 2 \\ \iff t &= \frac{1}{a - b} \\ (\because a \neq b) \end{aligned}$$

である。すなわち、中心は  $\left(\frac{1}{a - b}\right)$  である。

また、半径は

$$\begin{aligned} |\alpha_1 - t| &= \sqrt{at + t^2 + 1} \\ &= \sqrt{a \cdot \frac{1}{a - b} + \frac{1}{(a - b)^2} + 1} \\ &= \frac{\sqrt{a(a - b) + 1 + (a - b)^2}}{|a - b|} \\ &= \frac{\sqrt{2a^2 - 3ab + b^2 + 1}}{|a - b|} \end{aligned}$$

である。

- (2) ①, ②, ③がいずれも実数解をもたないことから、④, ⑤に加えて

$$D_3 = c^2 - 12 < 0$$

# 強者の戦略

も必要である。このとき

$$\textcircled{3} \iff x = \frac{-c \pm \sqrt{12 - c^2}i}{2}$$

であり、 $\gamma_1$  と  $\gamma_2$  も実軸に関して対称な位置にある。

さらに、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$  の解がすべて同一円周上にあることから、 $\alpha_1(\alpha_2)$ 、 $\beta_1(\beta_2)$ 、 $\gamma_1(\gamma_2)$  の実部はいずれも相異なり、 $a$ 、 $b$ 、 $c$  はいずれも相異なる（方程式の定数項が違うので、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$  の解が一致することはないことに注意）。

ここで、 $\textcircled{2}$ 、 $\textcircled{3}$  の4解が同一円周上にあるとき、中心を表す実数を  $s$  とおく。（1）と同様にして

$$\begin{aligned} & |\beta_1 - s| = |\gamma_1 - s| \\ \iff & \left| -\frac{b}{2} - s + \frac{\sqrt{8 - b^2}i}{2} \right| = \left| -\frac{c}{2} - s + \frac{\sqrt{12 - c^2}i}{2} \right| \\ \iff & \left( -\frac{b}{2} - s \right)^2 + \frac{8 - b^2}{4} = \left( -\frac{c}{2} - s \right)^2 + \frac{12 - c^2}{4} \\ \iff & bs + s^2 + 2 = cs + s^2 + 3 \\ \iff & s = \frac{1}{b - c} \end{aligned}$$

である。この円と（1）の円の中心が一致する条件は

$$\begin{aligned} t = s & \iff \frac{1}{a - b} = \frac{1}{b - c} \\ & \iff a - b = b - c \\ & \iff 2b = a + c \end{aligned}$$

である。これが成り立つとき、同じ点を中心でいずれも  $\beta_1$ 、 $\beta_2$  を通るので、一致する。

以上より、求める必要十分条件は「 $a$ 、 $b$ 、 $c$  が相異なる実数である」

かつ 「 $a^2 < 4$  かつ  $b^2 < 8$  かつ  $c^2 < 12$ 」

かつ 「 $2b = a + c$ 」

である。

<解答終>

<コメント>

数学科の川崎です。今年度もよろしく願いいたします。今回は、この春の2018年度入試から、東京工業大学の問題を出題しました。出来は良かったのでしょうか？この問題は今年のセットでは取りたい問題です。決して難しくはないのですが、本番では十分に差がついた問題だと思います。

以下設問ごとの補足です。

(1)  $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$  が実数解をもたないことから、まず判別式の条件を見ます。授業をしてびっくりするのは、この条件を見落とす人が多いことです。「問題文に実数解をもたないって書いてあるんだから、もたないこと前提で議論すればいいんじゃないですか？」などと聞かれますが、それは間違いです。実数解をもつときもあるわけですから、 $a$ 、 $b$  には動ける範囲に条件があり、答案にはその条件を明記すべきです。

この小問で最も重要なのは、以下の事実（定理）です。

定理

$f(x)$  を実数係数の整式とする。

このとき、方程式  $f(x) = 0$  が虚数解  $\alpha$  をもてば、その共役である  $\bar{\alpha}$  も解である。

証明できますか？基本ですが、稀に問題として出題されることもありますので、証明も与えておきます。

※ 共役複素数の性質である

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha} \cdot \bar{\beta}$$

を用います。これらは  $\alpha = a + bi$ 、 $\beta = c + di$  ( $a$ 、 $b$ 、 $c$ 、 $d$  は実数) とおいて、具体的に計算することで示せます。各自示してみてください。

<証明>

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (a_k \text{ はいずれも実数})$$

とおく。 $x = \alpha$  が解であることから

$$f(\alpha) = 0 \iff \sum_{k=0}^n a_k \alpha^k = 0$$

である。両辺の共役をとって、上の性質を用いると

$$\overline{\sum_{k=0}^n a_k \alpha^k} = 0 \iff \sum_{k=0}^n \overline{a_k} \cdot (\bar{\alpha})^k = 0$$

$$\iff \sum_{k=0}^n a_k \cdot (\bar{\alpha})^k = 0 \quad \dots\dots (*)$$

$$\iff f(\bar{\alpha}) = 0$$

となる。ただし、(\*)には  $a_k$  が実数であることを用いた。

したがって、 $\bar{\alpha}$  も解である。

<証明終>

# 強者の戦略

今は2次方程式なので、解の公式で解けば当たり前前の事実ですが

## 「実数係数で虚数解なら共役も解」

が問題を解く上での鍵になることも少なくありません。きちんと押さえましょう。合わせて、虚数係数の方程式ではこの事実は成り立たないことも覚えておいてください。

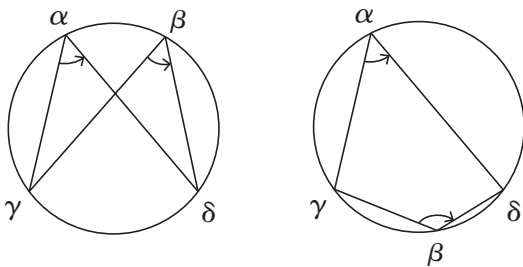
さて、問題に話を戻します。今見たことから、 $\alpha_1$  と  $\alpha_2$ ,  $\beta_1$  と  $\beta_2$  は実軸対称です。これらの位置関係から、実部が等しければ同一直線上、実部が等しくなければ等脚台形をなすので同一円周上と分かります。同一円周上を示す部分は、以下の定理を用いても良いでしょう。

### 定理

複素数平面上に4点  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  があり、これらは同一直線上にないとする。このとき、これら4点が同一円周上にあるための必要十分条件は

$$\text{複比 } \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha} \div \frac{\delta - \beta}{\gamma - \beta} \text{ が実数}$$

となることである。



この定理は  $\arg \frac{\delta - \alpha}{\gamma - \alpha}$ ,  $\arg \frac{\delta - \beta}{\gamma - \beta}$  (上図で矢印

をつけた角)の差を考えていて、左上図のように  $\alpha, \beta$  が線分  $\gamma\delta$  に対して同じ側にあるときは円周角の定理を、 $\alpha, \beta$  が線分  $\gamma\delta$  に対して反対側にあるときは内接四角形の性質(向かい合う角の和が  $\pi$ )を表します。本問にこの定理を用いると

<別解>

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  が同一直線上にないとき

$$\begin{aligned} \frac{\beta_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} \div \frac{\beta_2 - \alpha_2}{\beta_1 - \alpha_2} &= \frac{\beta_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} \div \frac{\overline{\beta_1 - \alpha_1}}{\overline{\beta_2 - \alpha_1}} \\ &= \frac{\beta_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} \cdot \frac{\beta_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} \\ &= \left| \frac{\beta_2 - \alpha_1}{\beta_1 - \alpha_1} \right|^2 \end{aligned}$$

となり、これは実数であるから、4点  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$  は同一円周上にある。

<別解終>

となります。

一般に複比は計算が煩雑になることが多く、まずは図形的に解けないかを考えてみるのですが、何も思いつかないときは最後の手段に使いましょう。

後半の円の中心と半径は、対称性から中心が実軸上にあることが分かれば、距離を丁寧に立式していくことで出せます。実部、虚部が分かれば

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (a, b \text{ は実数})$$

です。これも意外と盲点になるみたいですので、気をつけましょう。

(2) 3つ目の方程式が登場するので、やはり判別式を見ましょう。また、同一直線上にはないので、 $a, b, c$  はすべて異なります。ここまではすぐです。

6解がすべて同一円周上になくはないので、(1)の円(①, ②の解を通る円)と②, ③の解を通る円が一致する条件を考えます。(1)と同様に中心と半径を求めて、それらが一致するとしても良いのですが、ちょっと考えると、中心が一致すれば十分(どちらの円も  $\beta_1$  を通ることから、半径は等しくなる)が分かります。これに気付けば手間は半分以下で済みます。丁寧に計算して完答となります。必要十分条件を答えるので、一つでも条件が漏れては駄目です。気をつけてください。

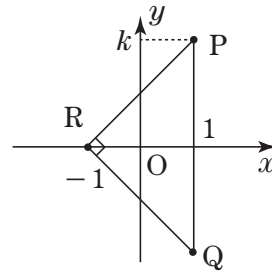
最後に一問、練習問題を載せておきます。今の問題と同一テーマです。是非挑戦してみてください。

# 強者の戦略

問

整式  $F(x) = x^3 - x^2 + (k^2 - 1)x + k^2 + 1$  について、次の各問に答えよ。ただし、 $k > 0$  とする。

- (1) 方程式  $F(x) = 0$  を解け。
- (2) 複素数平面において、 $F(x) = 0$  の 2 つの虚数解を表す点を  $P$ 、 $Q$  とし、実数解を表す点を  $R$  とする。3 点  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  を通る円の方程式を  $z$  を用いて表せ。
- (3)  $\angle PQR = \frac{\pi}{4}$  のとき、 $k$  の値を求めよ。



この図より  
 $k = 2$   
 である。

<解答終>

いかがだったでしょうか。今回はここまでにしたいと思います。また次回をお楽しみに。

<数学科 川崎>

<解答>

- (1) ( $F(-1) = 0$  に気付くことで)

$$\begin{aligned} F(x) = 0 &\iff (x+1)\{x^2 - 2x + (k^2 + 1)\} = 0 \\ &\iff x = -1, 1 \pm ki \quad (\because k > 0) \end{aligned}$$

である。

- (2) (1) より

$$P(1+ki), Q(1-ki), R(-1)$$

としてよい。実軸に関しての対称性より、円の中心は実軸上にあり、中心を表す実数を  $t$  とおく。

$$\begin{aligned} |(1+ki) - t| &= |-1 - t| \\ \iff (1-t)^2 + k^2 &= t^2 + 2t + 1 \\ \iff 4t &= k^2 \\ \iff t &= \frac{k^2}{4} \end{aligned}$$

である。また、半径は

$$|-1 - t| = \frac{k^2}{4} + 1$$

である。

よって、求める円の方程式は

$$\left| z - \frac{k^2}{4} \right| = \frac{k^2}{4} + 1$$

である。

- (3)  $\angle PQR = \frac{\pi}{4}$

のとき、 $\triangle PQR$  は  $\angle PRQ$  が直角の直角二等辺三角形であり、次図のようになる。