

# 強者の戦略

数学科の笹谷です。今回は2019年度北海道大学の問題にチャレンジしてみましょう。ゴリ押しで解き切る計算力も必要ですが、うまく工夫して計算を楽にできないか試行錯誤してみてください。

## 問題

$t$  を  $0 < t < 1$  を満たす実数とする。  $0, \frac{1}{t}$  以外のすべての実数  $x$  で定義された関数

$$f(x) = \frac{x+t}{x(1-tx)}$$

を考える。

- (1)  $f(x)$  は極大値と極小値を1つずつもつことを示せ。
- (2)  $f(x)$  の極大値を与える  $x$  の値を  $\alpha$ 、極小値を与える  $x$  の値を  $\beta$  とし、座標平面上に2点  $P(\alpha, f(\alpha))$ 、 $Q(\beta, f(\beta))$  をとる。  $t$  が  $0 < t < 1$  を満たしながら変化するとき、線分  $PQ$  の中点  $M$  の軌跡を求めよ。