

強者の戦略

こんにちは、数学科の松浦です。今回は数Ⅲの積分法からの出題です。誘導に乗って最後までたどり着きたい問題です。それでは次の問題を考えてみて下さい。

問題（数Ⅲ）

xyz 空間内の立体 $A: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} \leq 1$ について考える。

$$(1) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x dx$$
$$(n=3, 4, 5, \dots)$$

を示せ。

(2) xy 平面上の曲線 $C: x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$) で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 立体 A の体積を求めよ。