

# 強者の戦略

数学科の笹谷です。今まで数多くの良問を出題してきた「大阪市立大」ですが、「市立大」としての入試最後の年に、一問でたくさんの方が学べる良問がまた出題されました。今回は、それを紹介したいと思います。数学Ⅲの積分法の知識が必要です。手を動かして考えてみてください。

※ 2022 年から「大阪市立大」と「大阪府立大」は、「大阪公立大」として生まれ変わる予定となっています。

## 問題

$xy$  平面上の原点  $O$  を通る直線  $l$  を考える。  $l$  上の 2 点  $P$  と  $Q$  は以下の 3 条件を満たすとする。

- (1) 2 点  $P, Q$  の  $x$  座標,  $y$  座標はすべて 0 以上である。
- (2) 線分  $OP$  と線分  $OQ$  の長さの積は 1 である。
- (3) 点  $P$  と直線  $x=1$  との距離は、線分  $OP$  の長さに等しい。

$x$  軸の正の部分と線分  $OQ$  のなす角を  $\theta$  とする。次の問いに答えよ。

問 1 線分  $OQ$  の長さを  $\theta$  を用いて表せ。

問 2  $\theta$  が 0 から  $\frac{\pi}{2}$  まで変化するとき、線分  $OP$  が通過する部分の面積を  $S$ 、線分  $OQ$  が通過する部分の面積を  $T$  とする。 $S$  と  $T$  の値をそれぞれ求めよ。