

強者の戦略

数学科の川崎です。今回は数Ⅲの問題で、少し風変わりな問題を出題します。計算していくとある数がテーマになっていることが分かります。

第1問 (数Ⅲ)

自然数 n に対し $f_n(x) = x^{-1+\frac{1}{n}}$ ($x > 0$) とおく。また、正の実数 a_n は $\int_1^{a_n} f_n(x) dx = 1$ を満たすものとする。

(1) 関数 $f_n(x)$ の不定積分を求めよ。

(2) a_n の値と極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を求めよ。また、正の実数 b_n が $\int_1^{b_n} f_{n+1}(x) dx = -1$ を満たすとき、 b_n の値と極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ を求めよ。

(3) 2 以上の自然数 k に対して $\int_{k-1}^k f_n(x) > \frac{1}{k}$ を示し、これを利用して $a_n < 4$ を証明せよ。

(4) $\int_1^{a_n} f_{n+1}(x) dx < 1$ を示し、これを利用して $a_n < a_{n+1}$ を示せ。