

強者の戦略

強者サイトをご覧になっている皆さん、こんにちは。数学科の中西です。コロナウィルスの件で落ち着かない状態が続いていますが、体調には十分に気をつけて、日々をお過ごしください。

さて、先日行われた大学入学共通テストでは、特に数学の難度が高く、今年の大学入試は波乱の幕開けとなりました。来年以降も今年と同様の高難度の出題が続くかどうかは定かではありませんが、このサイトをご覧になっている皆さんであれば「難しい問題が出ても対応できるようになりたい」と考えている方が多いと思います。

そこで、「問題文で与えられた設定を読み取り、数式等に変える力」、「4桁、5桁になっても、短時間で対応できる計算力」などの、共通テストで問われる力について練習できそうな問題を用意しました。

それでは、問題です。

問題

南北方向に m 区画、東西方向に n 区画に区切られた長方形の土地がある。この土地のそれぞれの区画に m 種類の作物を 1 種類ずつ植える。ただし、南北方向には同じ種類の作物が植えられている区画はないようにする。このとき、東西方向に隣り合う区画に同じ種類の作物が植えられている場合には、それらの区画は連結した 1 個の畑と見なすとする。例えば、南北方向に 3 区画、東西方向に 5 区画で、A、B、C 3 種類の作物を次のように植えた場合、畑が 11 個と見なす。

A	C		B	
B		A	B	C
C	A	B	A	

- $m=3$ のときを考える。 $n=1$ ならば、畑の数は常に 3 個で、1 通りある。 $n=2$ ならば、畑の数は 3 個、5 個、6 個のいずれかで、3 通りある。 $n=3$ ならば、畑の数は何通りあるか。また、 $n=10$ ならば、畑の数は何通りあるか。
- $m=3$ で $n=3$ のとき、畑の数が 8 個になる植え方は何通りあるか。
- $m=6$ のときを考える。各列の南北方向の 6 区画に作物を植える植え方は $6!$ 通りあるが、それらすべてが等確率になるように植えることにする。 $n=2$ のとき、畑が 8 個である確率 p と、畑が 10 個である確率 q をそれぞれ求めよ。また、 $n=3$ のとき、畑が 10 個である確率を r とする。 r が満たす不等式を、以下の (a) ~ (h) の中から 1 つ選べ。

(a) $r \geq \frac{1}{100}$

(b) $\frac{1}{200} \leq r < \frac{1}{100}$

(c) $\frac{1}{500} \leq r < \frac{1}{200}$

(d) $\frac{1}{1000} \leq r < \frac{1}{500}$

(e) $\frac{1}{2000} \leq r < \frac{1}{1000}$

(f) $\frac{1}{5000} \leq r < \frac{1}{2000}$

(g) $\frac{1}{10000} \leq r < \frac{1}{5000}$

(h) $r < \frac{1}{10000}$

強者足らんと頑張っている途中の方は、時間をかけてじっくり考えてもらって大丈夫です。すでに強者の域に達している方にとっては少し易しめの問題ですので、共通テストを意識して「15分」など制限時間を設けて取り組んでみると、練習になってよいと思います。

それでは、解答編でお待ちしています。