

強者の戦略

それでは解答です。

問題 (数学 I A I B)

次の各設問に答えよ。

(1) xyz 空間において

$$|x| + |y| + |z| \leq 1$$

を満たす立体の体積を求めよ。

(2) a を実数としたとき、 xyz 空間において

$$\begin{aligned} |x-a| + |y-a| + |z| &\leq 1, \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たす立体の体積 $V(a)$ を a の式で表せ。
ただし、立体が存在しない場合は $V(a) = 0$ とする。

《解答》

(1) $A(1, 0, 0), B(0, 1, 0), C(-1, 0, 0), D(0, -1, 0), E(0, 0, 1), F(0, 0, -1)$ とする。

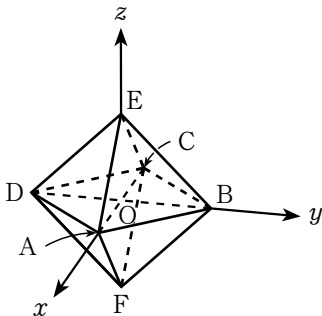
$$|x| + |y| + |z| \leq 1$$

が表す立体は、 $A \sim F$ を頂点とする正八面体である。

よって、求める体積は

$$\begin{aligned} &(\text{正方形 } ABCD \text{ の面積}) \cdot EF \cdot \frac{1}{3} \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) \cdot 2 \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

である。



(2) $|x-a| + |y-a| + |z| \leq 1$

が表す図形は、(1) の正八面体を x 軸方向に a 、 y 軸方向に a だけ平行移動したものである。

$$\begin{aligned} &A'(a+1, a, 0), B'(a, a+1, 0) \\ &C'(a-1, a, 0), D'(a, a-1, 0), \\ &E'(a, a, 1), F'(a, a, -1) \end{aligned}$$

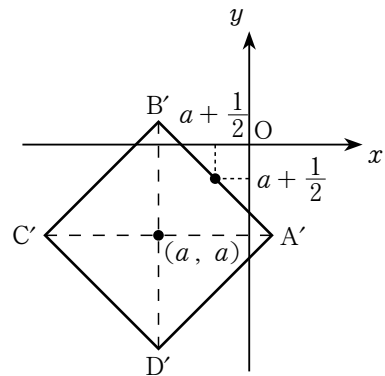
とする。

正八面体を xy 平面で切った断面は四角形 $A'B'C'D'$ であり、この四角形と $x \geq 0, y \geq 0$ が表す領域 W との位置関係で場合分けする。また

$$\begin{aligned} |x-a| + |y-a| + |z| &\leq 1, \\ x \geq 0, y \geq 0, z &\geq 0 \end{aligned}$$

を満たす立体を Z とし、領域 W の境界を \overline{W} とする (つまり、 \overline{W} は x 軸の $x \geq 0$ の部分、または y 軸の $y \geq 0$ の部分である)。

(i) \overline{W} が辺 $A'B'$ と共有点をもたないとき



辺 $A'B'$ の中点の座標に注目すると

$$a + \frac{1}{2} < 0 \quad \therefore a < -\frac{1}{2}$$

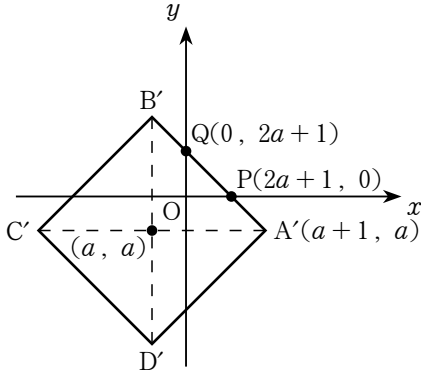
のときであり、このとき、図形 Z は存在せず

$$V(a) = 0$$

である。

強者の戦略

(ii) \overline{W} が辺 $A'B'$ と共有点をもつとき



直線 $A'B'$ の方程式は

$$y = -x + 2a + 1$$

より, P の x 座標と A' の y 座標に注目して

$$2a + 1 \geq 0 \quad \text{かつ} \quad a \leq 0$$

$$\therefore -\frac{1}{2} \leq a \leq 0$$

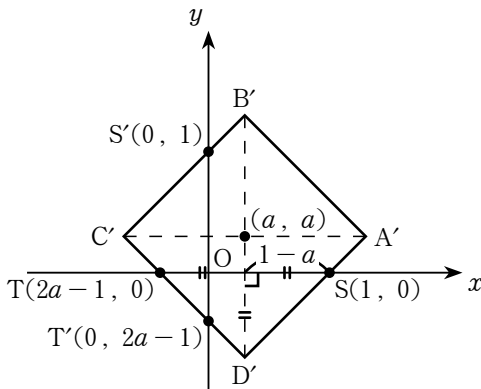
のときである.

このとき, 図形 Z は $R(0, 0, 2a+1)$ とすると三角錐 $OPQR$ であるから, その体積は

$$V(a) = \frac{(2a+1)^3}{6}$$

である.

(iii) \overline{W} が辺 $A'D'$ と共有点をもち, 辺 $C'D'$ とは共有点をもたないとき



A' の y 座標と T の x 座標に注目して

$$a \geq 0 \quad \text{かつ} \quad 2a - 1 < 0$$

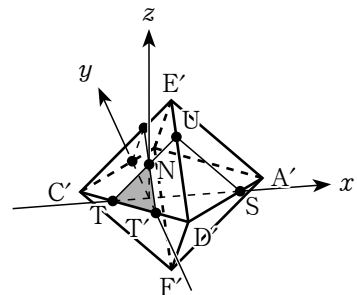
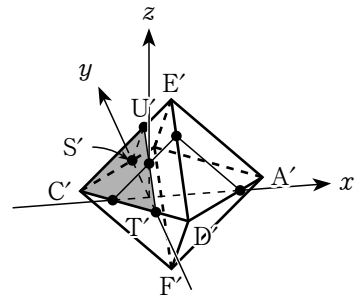
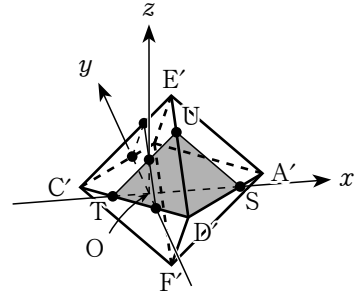
$$\therefore 0 \leq a < \frac{1}{2}$$

のときである.

$$U(a, 0, 1-a), \quad U'(0, a, 1-a)$$

$$N(0, 0, 1-2a)$$

とする.



図より, 求める図形 Z の体積は正四面体 $A'B'C'D'E'$ の体積から, 三角錐 $D'STU$ と三角錐 $C'T'S'U$ の体積を引き, さらに重複して引いた三角錐 $OTT'N$ の体積を加えたものである.

三角錐 $D'STU$ と三角錐 $C'T'S'U$ は合同な図形で, その体積はともに

$$\left\{ 2(1-a) \cdot (1-a) \cdot \frac{1}{2} \right\} \cdot (1-a) \cdot \frac{1}{3} \\ = \frac{1}{3}(1-a)^3$$

強者の戦略

である。また、三角錐 OTT'N の体積は

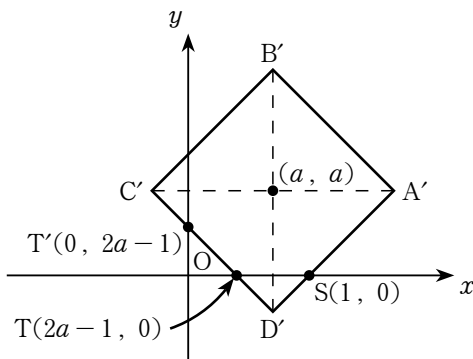
$$\frac{1}{6}(1-2a)^3$$

である。よって、求める体積は

$$\begin{aligned} & \frac{2}{3} - \frac{1}{3}(1-a)^3 \cdot 2 + \frac{1}{6}(1-2a)^3 \\ &= \frac{-4a^3 + 6a + 1}{6} \end{aligned}$$

である。

(iv) \overline{W} が辺 $C'D'$ と共有点をもつとき



点 T の x 座標に注目して

$$0 \leq 2a - 1 \leq 1$$

$$\therefore \frac{1}{2} \leq a \leq 1$$

のときである。

図より、求める図形 Z の体積は (1) の正八面体の体積の半分から、三角錐 $D'STU$ と三角錐 $CT'SU$ の体積を引いたものであるから

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{3}(1-a)^3 \cdot 2 = \frac{2a^3 - 6a^2 + 6a}{3}$$

である。

(v) $1 \leq a$ のとき

立体 Z は正四面体 $A'B'C'D'E'$ であるから、求める体積は

$$V(a) = \frac{2}{3}$$

である。

(i)~(v) より

$$V(a) = \begin{cases} 0 & (a < -\frac{1}{2}) \\ \frac{(2a+1)^3}{6} & (-\frac{1}{2} \leq a \leq 0) \\ \frac{-4a^3 + 6a + 1}{6} & (0 \leq a < \frac{1}{2}) \\ \frac{2a^3 - 6a^2 + 6a}{3} & (\frac{1}{2} \leq a \leq 1) \\ \frac{2}{3} & (1 \leq a) \end{cases}$$

である。

《解答終》

《解説》

数学科の松浦です。今回は慶應義塾大学で 2022 年度に出題された問題から誘導を少し減らしたものを取り上げました。(2) では、(1) で考えた正八面体を平行移動させることになるので、その様子をいかに捉えるかがポイントとなる問題です。

空間図形の解法

- ① 空間座標
- ② 空間ベクトル
- ③ 次元下げ → 断面・垂線・展開図

今回は ③ の「断面」を主軸に考えています。正八面体の断面 $A'B'C'D'$ と領域 $x \geq 0, y \geq 0$ の位置関係を考えれば、5 つの場合分けが必要なことに気づきます。

あとは、立体の体積を求めるだけなのですが、(iii) の場合が厄介です。直接、題意の立体の体積を求めることが困難なため、余計な部分の体積を除くことで計算しています。このときは、断面だけでなく、立体の様子を捉える必要があります。

今回は線分で構成された多面体だけ考えればよく、曲線は登場しないため、図示もそこまで大変ではありません。ただ、やはり頭の中で立体の様子がある程度想像できていなければ、図示することも、図から様子を掴むことも難しいでしょう。

強者の戦略

空間の様子を把握できるようになるためには、空間図形の問題をいくつも解いて、空間の様子を考える経験を増やすのが一番です。共通テストでも数学Ⅱ・Bのベクトルで出題されることがありますので、特に苦手意識がある方はしっかり準備をしておきましょう。

(数学科 松浦)