

# 強者の戦略

物理の藤原です。強者の戦略 HP 物理ページ第83回（問題編），第84回（解答編）を担当させていただきます。

昨年の2022年は日本や世界の情勢はめまぐるしく変化していました。一方で私個人としては，家族と仲良く暮らしつつ，やや同じ所をいったりきたりしている感があった一年でした。

今回は力学の「振り子」をテーマにした入試問題を紹介したいと思います。「振り子の性質を様々な切り口で味わいつくす」といった趣きのある問題で，終盤では「2次元的な振動：リサージュ図形」について問われていました。この「リサージュ図形」は，ばね振動や光の振動に関しては入試問題で見かけた事がありますが，振り子で見たのは初めてのようです。

設定を練りこめば，力学でもまだまだ斬新な問題が作れるんだと気付かされました。この問題に挑戦するときは，是非とも設問(4)，(5)までひと通り取り組んでみて下さい。

**【問題】** 2つのひもを用いた振り子運動 『出典：2021年2月 名古屋大学 改』  
(考察時間：30分)

質量  $m$  の大きさの無視できる小球 A，長さが  $b$  のひも B，長さが  $c$  のひも C を用意する。ひも C の両端を水平な天井の点 Q と点 R に接着し，ひも C の点 P とひも B の一端を接着する。さらに，ひも B の他端には，小球 A を取り付ける。ひも B とひも C の質量は無視できるほど小さく，ひもは伸び縮みしない。この装置に手を触れることなくしばらく放置したところ，図1の位置で小球 A は静止した。このとき，点 P におけるひも C の折れ曲がり角度 ( $\angle QPR$  の大きさ) は  $90^\circ$ ， $\angle PQR$  の大きさは  $30^\circ$ ， $\angle PRQ$  の大きさは  $60^\circ$  で，ひも B とひも C はたわむことなく張っていた。

次にひも C の短辺 PR とひも B が鉛直面内で一直線をなすように，小球 A を図2の位置まで手で持ち上げ，そっと手を放したところ，ひも B，ひも C がたわむことなく，小球 A は周期運動を開始した。重力加速度の大きさを  $g$  とし，摩擦や空気抵抗は十分に小さく無視できるものとして以下の問いに答えよ。

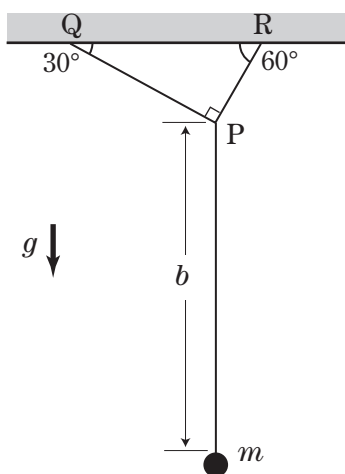


図 1

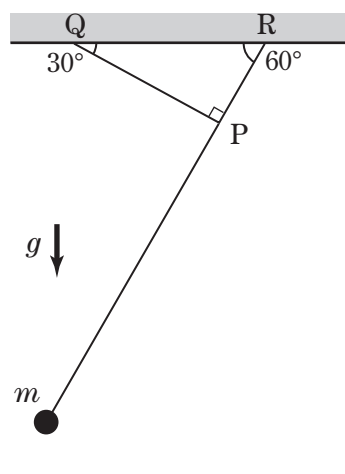


図 2

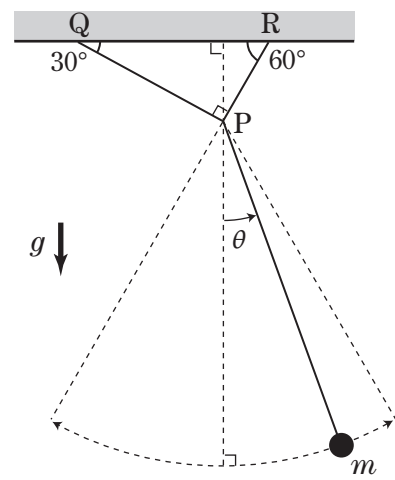


図 3

# 強者の戦略

設問(1) 小球 A の周期運動は、図 3 のように点 P を中心とした半径  $b$  の円弧状に沿って、P を通る鉛直線に対するひも B の角度  $\theta$  が、 $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$  となる範囲で運動する。角度  $\theta$  の位置を通過する瞬間の小球 A の速さ  $v$  を、 $m, g, b, \theta$  のうち必要なものを用いて表せ。

設問(2) 小球 A の周期運動におけるひも B の張力  $T$  の最大値  $T_{\max}$  と最小値  $T_{\min}$  を、 $m, g$  のうち必要なものを用いて表せ。

設問(3) 図 3 に示される実験を実際に行ったところ、振幅が小さいときの振り子の振動周期の近似式とは 1.74% 程度異なった周期が測定された。以下の文章は、近似式と測定値との違いが生じる理由を説明するものである。この文章のそれぞれの空欄に当てはまる最も適切な選択肢を、(ア) から (ス) までのなかから選べ。

「長さ  $L$  のひもに質量  $m$  の小球を取り付けた振り子を図 4 に示す。この振り子の周期運動において、小球は点 O を最下点とする円弧に沿って運動する。 $X$  は点 O から円弧に沿った質点の変位を表す。重力加速度の大きさを  $g$  とすれば、周期運動の途中、図に示す瞬間に小球にはたらく円弧に沿った方向のちから  $F$  は  $F = \boxed{\text{あ}}$  である。ここで、 $X$  の正方向を  $F$  の正方向とする。 $X$  が  $L$  に比べて十分に小さければ、最下点 O に引き戻そうとする力  $F = \boxed{\text{あ}}$  を計算するのに、近似式  $F \approx \boxed{\text{い}}$  を用いてよい。このとき、振り子の運動方程式は、ばね定数を  $k = \boxed{\text{う}}$  としたときの、フックの法則に従うばねに取り付けられた質量  $m$  の小球の運動方程式と一致する。このことから、振幅が小さい振り子の振動周期の等時性が示され、振動周期の近似式  $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$  が得られる。しかし、大きな振幅で振動する振り子の場合の力  $\boxed{\text{あ}}$  の大きさは、その近似式の大きさと比べて小さい。したがって、図 3 の設定のような大きな振幅で振動する振り子の振動周期は、小さな振幅で振動する振り子の振動周期  $\boxed{\text{え}}$  い。」

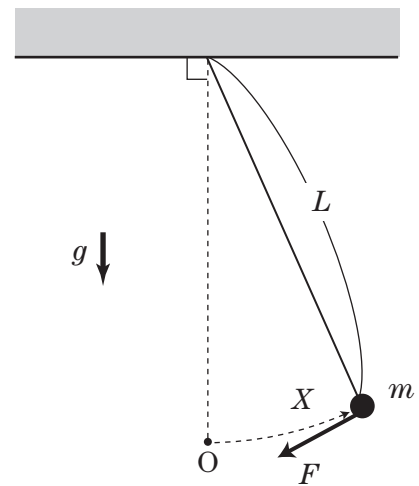


図 4

選択肢

- (ア)  $Mg$  (イ)  $-\frac{MgX}{L}$  (ウ)  $\frac{MgX^2}{L^2}$  (エ)  $\frac{Mg}{L}$  (オ)  $-\frac{MgX}{L^2}$  (カ)  $\frac{MgX^2}{L^3}$   
 (キ)  $Mg \cos \frac{X}{L}$  (ク)  $-Mg \sin \frac{X}{L}$  (ケ)  $Mg \cos^2 \frac{X}{L}$  (コ)  $Mg \sin^2 \frac{X}{L}$   
 (サ) より長 (シ) より短 (ス) と等し

# 強者の戦略

設問(2)で考察した小球Dの振動の水平面内での方向を  $x$  方向とし、それと同一水平面内で直交する方向を  $y$  方向とする。いま、 $x$  方向だけでなく  $y$  方向にも振動させる状況を考え、振り子を正面から見たときの様子を図5に示し、真横から見たときの様子を図6に示す。この振り子を真横から見た図6では、ひもCの長辺と短辺は重なり、長辺と短辺が1本の線のように見える。座標  $x$  と座標  $y$  はつりあいの位置からの小球Dの左右方向の変位と前後方向の変位を表す。なお、ひもBの長さ  $b$  と比べて、ひもCの長さ  $c$  を無視することはできない。

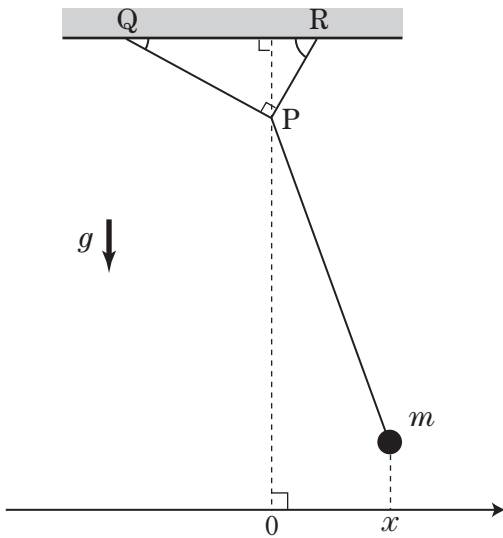


図 5

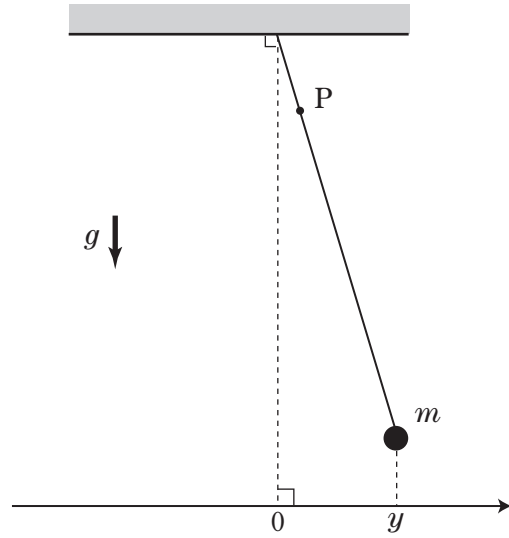
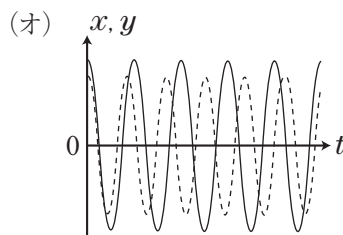
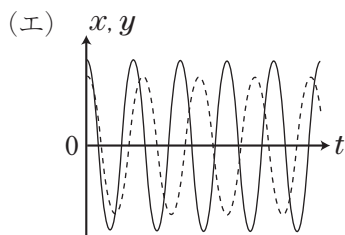
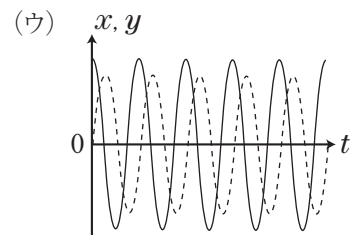
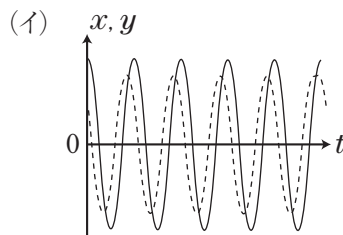
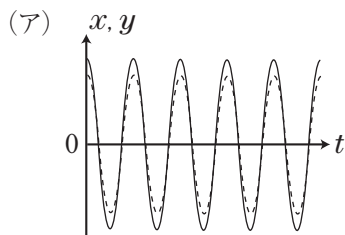


図 6

設問(4) 小球Dが  $x$  方向と  $y$  方向の両方に小さい振幅で振動している場合について、 $x$  方向の変位（実線）と  $y$  方向の変位（破線）の時間  $t$  による変化を表すグラフとして最も適切なものを下の選択肢よりひとつ選べ。

選択肢

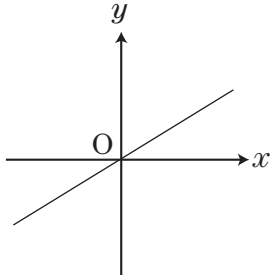


# 強者の戦略

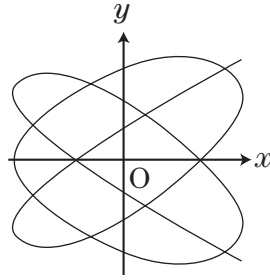
設問(5) 次に、 $x$ 方向と $y$ 方向の両方に小さい振幅で振動している場合について、 $xy$ 平面での小球Dの軌跡を考えることにする。そのような軌跡を表すグラフとして最も適切なものを下の選択肢よりひとつ選べ。

選択肢

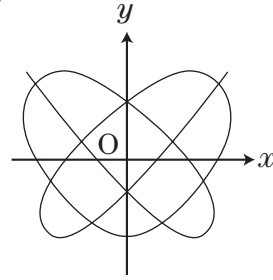
(ア)



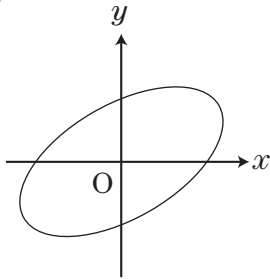
(イ)



(ウ)



(エ)



(オ)

